
Cuaderno de notas de trabajo

Carlos Graef Fernández

Cuaderno Sn 8

DESARROLLO EN SERIE DE LAGRANGE DE MAGNITUDES RETARDADAS.

PUNTO MASA GENERADOR DEL CAMPO GRAVITACIONAL.

1.1) M — masa en reposo del punto masa

1.2) X, Y, Z — coordenadas del punto masa. $\vec{R}(X, Y, Z)$

1.3) $\vec{V} = (V^x, V^y, V^z)$ — vector velocidad del punto masa. $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$.

1.4) $\vec{A} = (A^x, A^y, A^z)$ — vector aceleración del punto masa. $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

1.5) $X = X(t); Y = Y(t); Z = Z(t)$
 $\vec{R} = \vec{R}(t)$

$$V^x = \frac{dX}{dt}; V^y = \frac{dY}{dt}; V^z = \frac{dZ}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}; \vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

1.6) Γ — trayectoria del punto masa

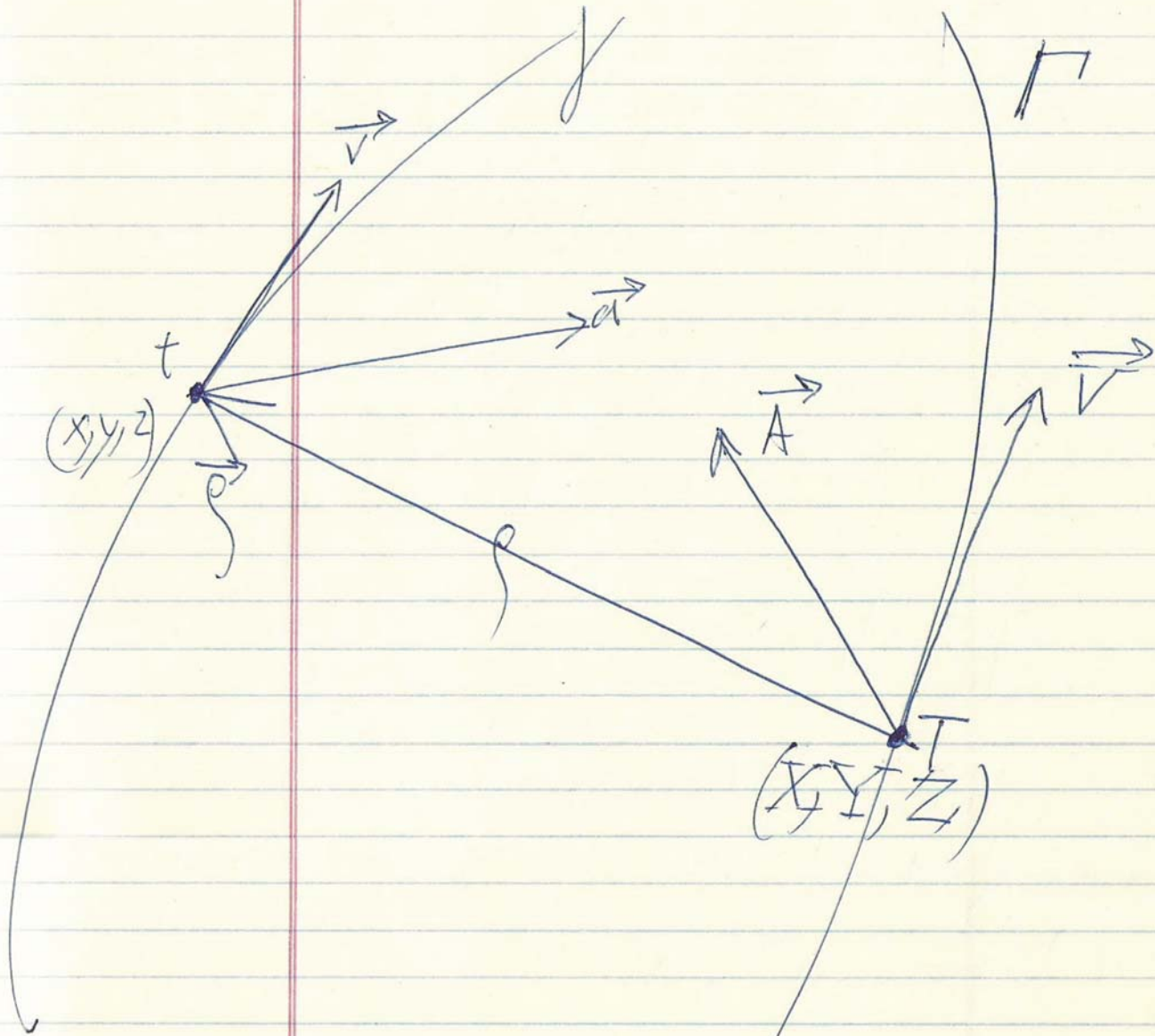
PARTÍCULA DE PRUEBA EN EL CAMPO GRAVITACIONAL.

- 2.1) $\vec{r} = (x, y, z)$ vector de posición de la partícula de prueba;
- 2.2) $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ vector velocidad de la partícula de prueba.
- 2.3) $\vec{a} = (a^x, a^y, a^z)$ vector aceleración de la partícula de prueba
- 2.4) $x(t); y(t); z(t) \quad \vec{r}(t)$
 $\vec{r} = \vec{r}(t).$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

- 2.5) γ — trayectoria de la partícula de prueba.

RETARDAMIENTO.



X, Y, Z — posición retardada del punto masa con respecto al ~~para~~ acontecimiento del campo (t, x, y, z)
 T — tiempo retardado

~~Punto del campo~~

Acontecimiento del campo: Paso de la partícula de prueba en el instante t por el punto x, y, z .

Acontecimiento de la fuente: Paso del punto masa en el instante T por el punto X, Y, Z .

$$\rho = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}.$$

~~then~~ $t - T = \rho$

Velocidad de la señal gravitacional
= velocidad de la luz = 1.

$$t - T = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}.$$

$$T = t - \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}.$$

Denotaremos con una raya abajo de la literal el valor que adquiriera una magnitud para $T=t$.

$$\underline{X} = [X(T)]_{T=t} ; \underline{Y} = [Y(T)]_{T=t}$$

$$\underline{Z} = [Z(T)]_{T=t},$$

$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ son "valores simultáneos" de X, Y, Z con (t, x, y, z)

$$\underline{\vec{V}} = \left(\frac{d\underline{R}}{dT} \right)_{T=t} ; \underline{\vec{A}} = \left(\frac{d\underline{A}}{dT} \right)_{T=t}.$$

Instante T

Instante t

Vector de posición del punto masa

$$\vec{R} = (X, Y, Z);$$

$$\underline{\vec{R}} = (\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}).$$

Vector velocidad del punto masa

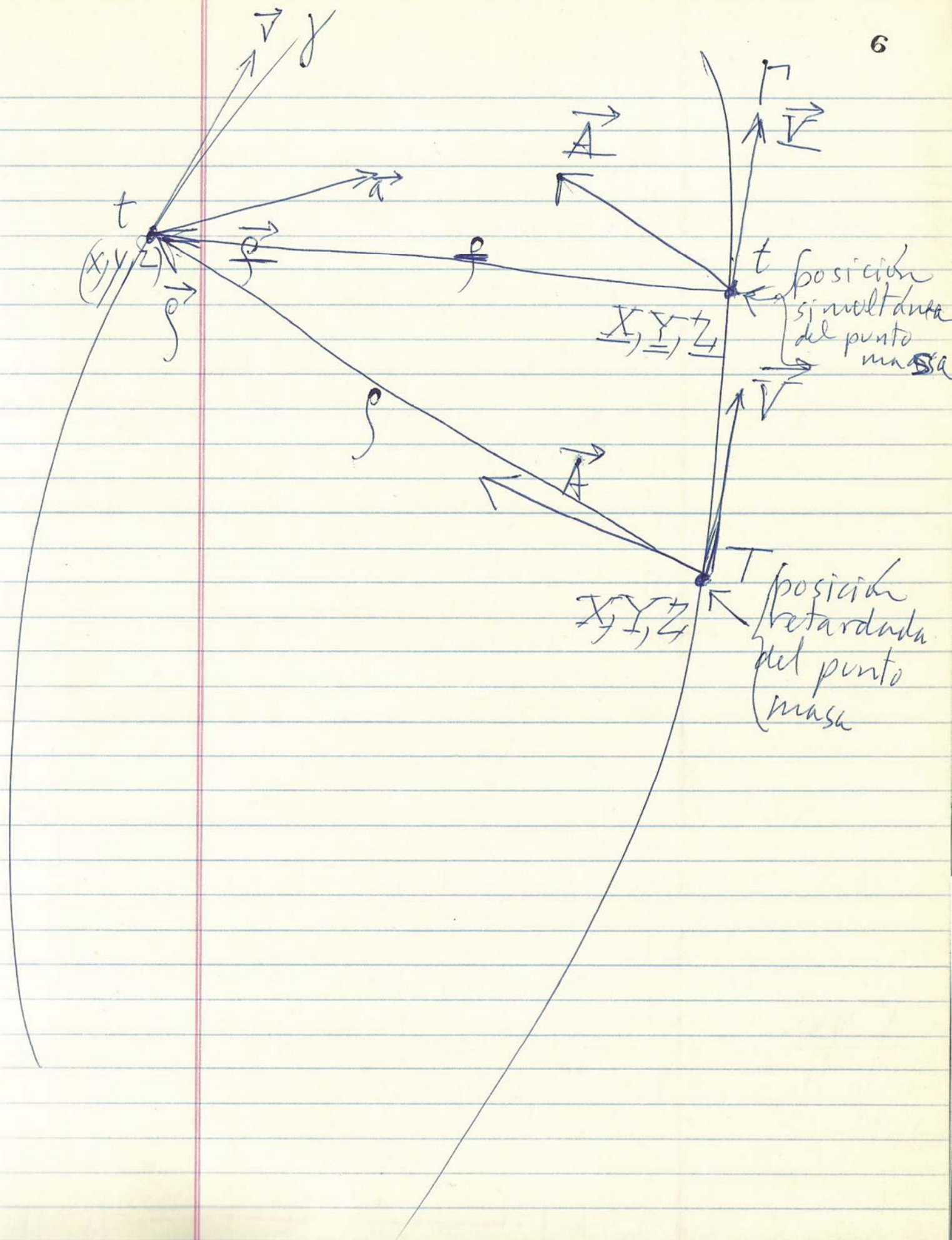
$$\vec{V} = (V^x, V^y, V^z);$$

$$\underline{\vec{V}} = (\underline{V}^x, \underline{V}^y, \underline{V}^z).$$

Vector aceleración del punto mas

$$\vec{A} = (A^x, A^y, A^z);$$

$$\underline{\vec{A}} = (\underline{A}^x, \underline{A}^y, \underline{A}^z).$$



OPERADOR $\frac{d}{dt}$

El operador $\frac{d}{dt}$ opera sólo sobre funciones del tiempo retardado T .
Se considerarán funciones de T a las siguientes:

$$X, Y, Z, V^x, V^y, V^z, A^x, A^y, A^z, \dots$$

Definición de $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt} M(T) = \left(\frac{dM}{dT} \right)_{T=t} = \underline{\underline{\left(\frac{dM}{dT} \right)}}$$

$$\frac{d}{dt} M(T) = \underline{\underline{\left(\frac{dM}{dT} \right)}}$$

En el caso de ρ :

$$\rho = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{-(x-X)V^x - (y-Y)V^y - (z-Z)V^z}{\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}} \right]_{T=t}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{-\vec{\rho} \cdot \vec{V}}{\rho}}$$

$$\vec{r} = (x-X, y-Y, z-Z)^T; \quad \vec{r} = (x-X, y-Y, z-Z)^T$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dT}, \frac{dy}{dT}, \frac{dz}{dT} \right)_{T=t} = (\underline{v}^x, \underline{v}^y, \underline{v}^z);$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\underline{v}^x, \underline{v}^y, \underline{v}^z) = \underline{\vec{v}}.$$

$$\frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} = \underline{\vec{a}}; \quad \frac{d\underline{\vec{a}}}{dt} = \underline{\ddot{\vec{a}}}; \quad \frac{d^2 \underline{\vec{a}}}{dt^2} = \underline{\overset{..}{\vec{a}}};$$

$$\frac{d^n \underline{\vec{a}}}{dt^n} = \underline{\overset{(n)}{\vec{a}}}.$$

$$\underline{\overset{n}{\vec{a}}} = \left(\frac{d^n \underline{\vec{a}}}{dT} \right)_{T=t}.$$

Tabla

$\frac{d^n}{dt^n}$	$\frac{d^n}{dt^n} A$	$\frac{d^n}{dt^n} A$	$\frac{d^n}{dt^n} A$
--------------------	----------------------	----------------------	----------------------

$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$
--	--	--	--

plug into

$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^n}{dt^n} A \right)$
--	--	--	--

DESARROLLO DE LAGRANGE.

L. Page & N. I. Adams. Electrodynamics.
D. Van Nostrand & Co. New York 1940 página 171

$$v(T) = v(t) - \frac{1}{1!c} \left\langle \rho \frac{dv}{d\tau} \right\rangle + \frac{1}{2!c^2} \frac{d}{d\tau} \left\langle \rho^2 \frac{dv}{d\tau} \right\rangle \\ - \frac{1}{3!c^3} \frac{d^2}{d\tau^2} \left\langle \rho^3 \frac{dv}{d\tau} \right\rangle + \dots + \frac{(-1)^n}{n!c^n} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \left\langle \rho^n \frac{dv}{d\tau} \right\rangle_{t_0}$$

$\frac{\vec{\rho}}{\rho^3}$ hasta términos en 4. grado $(\frac{1}{c^4})$

$-\frac{3(\vec{V} \cdot \vec{\rho})}{\rho^4} \vec{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \vec{V}$ hasta términos $(\frac{1}{c^3})$

OPERADOR R — (retardar).

11

$$R\{v(t)\} = v(T)$$

Demostación de que R es lineal

$$R\{\kappa v(t)\} = \kappa R\{v(t)\}$$

$$R\{v_1 + v_2\} =$$

$$\begin{aligned} R\{v_1(t) + v_2(t)\} &= \left[\begin{aligned} &v_1(t) + v_2(t) \\ &= \frac{1}{1!c} \left\langle \rho \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2!c^2} \left\langle \rho^2 \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \right\rangle \\ &- \frac{1}{3!c^3} \left\langle \rho^3 \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \right\rangle \\ &\vdots \\ &+ \frac{(-1)^n}{n!c^n} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left\langle \rho^n \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \right\rangle \\ &+ \dots \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$v_1(t) + v_2(t) = [v_1(t) + v_2(t)]_{T=t} =$$

$$\sum \frac{(-)^n}{n! c^n} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left\langle \int^n \frac{dv_1}{dt} + \int^n \frac{dv_2}{dt} \right\rangle$$

$$= \sum \frac{(-)^n}{n! c^n} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left\langle \int^n \frac{dv_1}{dt} \right\rangle + \sum \frac{(-)^n}{n! c^n} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left\langle \int^n \frac{dv_2}{dt} \right\rangle$$

$$= v_1(t) + v_2(t)$$

El operador de retardar R es lineal

$$v = \frac{\vec{p}}{p^3}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{p}}{p^3} \right) = -\frac{\vec{V}}{p^3} - \frac{3\vec{p}}{p^4} \left[\frac{-(\vec{p} \cdot \vec{V})}{p} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{p}}{p^3} \right) = + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{V})}{p^5} \vec{p} - \frac{1}{p^3} \vec{V} = \frac{dv}{dt}$$

$$p \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{p}}{p^3} \right) = + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{V})}{p^4} \vec{p} - \frac{1}{p^2} \vec{V} = p \frac{dv}{dt}$$

$$p^2 \frac{d}{dt} \frac{\vec{p}}{p^3} = + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{V})}{p^3} \vec{p} - \frac{1}{p} \vec{V} = p^2 \frac{dv}{dt}$$